Métodos Matemáticos I
El cuerpo de los números complejos

Javier Pérez González

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

November 9, 2012

- Los números de la forma $x + iy$, donde x e y son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(x+iy)+(u+iv) &= x+u+i(y+v)\\ (x+iy)(u+iv) &= xu-yv+i(xv+yu)\end{aligned}$$

  se llaman números complejos.

- Los números de la forma $x + iy$, donde x e y son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(x+iy)+(u+iv) &= x+u+i(y+v)\\ (x+iy)(u+iv) &= xu-yv+i(xv+yu)\end{aligned}$$

  se llaman números complejos.
- Se dice que x es la *parte real* e y la *parte imaginaria* del número complejo $x + iy$.

- Los números de la forma $x + iy$, donde x e y son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(x+iy)+(u+iv) &= x+u+i(y+v)\\ (x+iy)(u+iv) &= xu-yv+i(xv+yu)\end{aligned}$$

  se llaman números complejos.

- Se dice que x es la *parte real* e y la *parte imaginaria* del número complejo $x + iy$.
- Los números complejos con parte imaginaria cero, $x = x + i0$, son números reales.

- Los números de la forma $x + iy$, donde x e y son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$
\begin{aligned}
(x + iy) + (u + iv) &= x + u + i(y + v) \\
(x + iy)(u + iv) &= xu - yv + i(xv + yu)
\end{aligned}
$$

  se llaman números complejos.

- Se dice que x es la *parte real* e y la *parte imaginaria* del número complejo $x + iy$.
- Los números complejos con parte imaginaria cero, $x = x + i0$, son números reales.
- Los números complejos con parte real cero, $iy = 0 + iy$, se llaman *imaginarios puros*.

- Los números de la forma $x + iy$, donde x e y son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(x+iy)+(u+iv) &= x+u+i(y+v)\\ (x+iy)(u+iv) &= xu-yv+i(xv+yu)\end{aligned}$$

  se llaman números complejos.

- Se dice que x es la *parte real* e y la *parte imaginaria* del número complejo $x + iy$.
- Los números complejos con parte imaginaria cero, $x = x + i0$, son números reales.
- Los números complejos con parte real cero, $iy = 0 + iy$, se llaman *imaginarios puros*.
- Dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

- Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.

- Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.
- El elemento neutro de la suma es 0.

- Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.
- El elemento neutro de la suma es 0.
- La unidad del producto es 1.

- Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.
- El elemento neutro de la suma es 0.
- La unidad del producto es 1.
- $-x - iy$ es el opuesto de $x + iy$

- Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.
- El elemento neutro de la suma es 0.
- La unidad del producto es 1.
- $-x-iy$ es el opuesto de $x+iy$
- Todo número $x+iy\neq 0$ tiene inverso:

$$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)=1.$$

- Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas.
- El elemento neutro de la suma es 0.
- La unidad del producto es 1.
- $-x - iy$ es el opuesto de $x + iy$
- Todo número $x + iy \neq 0$ tiene inverso:

$$(x + iy)\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = 1.$$

- Estas propiedades se expresan diciendo que el conjunto de los números complejos con las operaciones antes definidas es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa por $\mathbb{C}$ y se llama *cuerpo de los números complejos*.

Convenio de notación

- Usaremos las letras z y w para representar números complejos y las letras x, y, u, v para representar números reales.

Convenio de notación

- Usaremos las letras z y w para representar números complejos y las letras x, y, u, v para representar números reales.
- Una expresión de la forma $z = x + iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y.

Convenio de notación

- Usaremos las letras z y w para representar números complejos y las letras x, y, u, v para representar números reales.
- Una expresión de la forma $z = x + iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y.
- Se escribe $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para representar las partes real e imaginaria de z.

- No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica.

- No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica.
- **¡Nunca escribas desigualdades entre números complejos!**

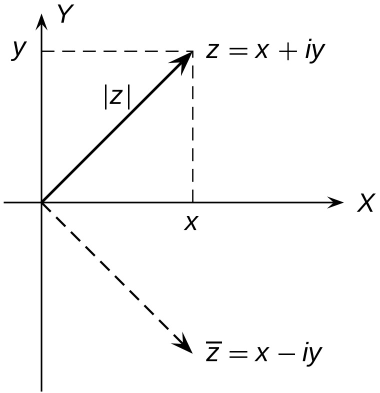

Figure. Representación de un número complejo

- El **conjugado** de $z = x + iy$ se define como $\overline{z} = x - iy$. Es evidente que $\overline{\overline{z}} = z$.

- El **conjugado** de $z = x + iy$ se define como $\overline{z} = x - iy$. Es evidente que $\overline{\overline{z}} = z$.
- *El conjugado de una suma es la suma de los conjugados*:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

- El **conjugado** de $z = x + iy$ se define como $\overline{z} = x - iy$. Es evidente que $\overline{\overline{z}} = z$.
- *El conjugado de una suma es la suma de los conjugados*:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

- *conjugado de un producto es el producto de los conjugados*:

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

- El **conjugado** de $z = x + iy$ se define como $\overline{z} = x - iy$. Es evidente que $\overline{\overline{z}} = z$.
- *El conjugado de una suma es la suma de los conjugados*:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

- *conjugado de un producto es el producto de los conjugados*:

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

- Para expresar un cociente de números complejos en la forma $a + ib$ se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{u + iv}{x + iy} = \frac{(u + iv)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{ux + vy}{x^2 + y^2} + i\frac{vx - uy}{x^2 + y^2}.$$

- El **módulo** o **valor absoluto** de $z = x + iy$, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- El **módulo** o **valor absoluto** de $z = x + iy$, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Recuerda que la **norma euclídea** de un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se define por:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- El **módulo** o **valor absoluto** de $z = x + iy$, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Recuerda que la **norma euclídea** de un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se define por:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- El módulo de un complejo $z = x + iy$ coincide con la norma euclídea del vector (x, y).

- Y la **distancia euclídea** entre dos puntos (x, y), (u, v) del plano viene dada por:

$$\|(x, y) - (u, v)\| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

- Y la **distancia euclídea** entre dos puntos (x, y), (u, v) del plano viene dada por:

$$\|(x,y)-(u,v)\| = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

- La **distancia** entre dos números complejos $z = x + iy$, $w = u + iv$ se define como $|z - w|$ y es la distancia euclídea entre los puntos del plano (x, y) y (u, v):

$$|z-w| = \|(x,y)-(u,v)\|$$

- Y la **distancia euclídea** entre dos puntos (x, y), (u, v) del plano viene dada por:

$$\|(x, y) - (u, v)\| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

- La **distancia** entre dos números complejos $z = x + iy$, $w = u + iv$ se define como $|z - w|$ y es la distancia euclídea entre los puntos del plano (x, y) y (u, v):

$$|z - w| = \|(x, y) - (u, v)\|$$

- Teniendo en cuenta que $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ obtenemos la igualdad:

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

Representación gráfica de la suma

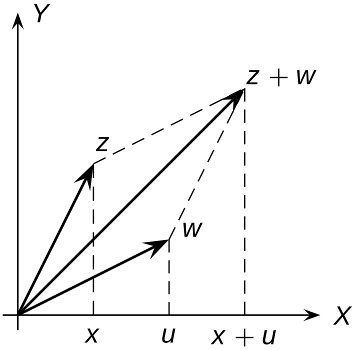

Figure. Suma de números complejos

Propiedades del módulo

- $$\boxed{\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}$$

Propiedades del módulo

- $$\boxed{\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}$$

- $$|zw| = |z||w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Propiedades del módulo

- $$\boxed{\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}$$
- $$|zw| = |z||w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$
- $$\boxed{|z+w| \leqslant |z| + |w|} \qquad \text{(desigualdad triangular)}$$

Propiedades del módulo

- $$\boxed{\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}$$
- $$|zw| = |z||w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$
- $$\boxed{|z+w| \leqslant |z| + |w|} \qquad \text{(desigualdad triangular)}$$
- $$|z+w| = |z| + |w| \Longleftrightarrow z = \lambda w \ \text{ con } \lambda > 0$$
$$|z+w| < |z| + |w| \Longleftrightarrow \frac{z}{w} \notin \mathbb{R}^+$$

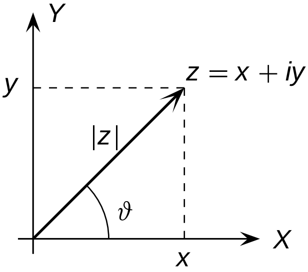

Figure. Forma polar de un número complejo

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\,\frac{y}{|z|}\right) = |z|(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

- Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z.

- Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z.
- El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\boxed{\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)\}}$$

- Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z.
- El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\boxed{\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)\}}$$

-

$$s, t \in \operatorname{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Argumento principal

- $$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) \cap]-\pi, \pi]$$

Argumento principal

- $$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) \cap]-\pi, \pi]$$
- $$\boxed{\arg(x+iy) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y < 0, x = 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0, x < 0 \end{cases}}$$

- Sean z, w complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces se verifica que:

- Sean z, w complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces se verifica que:
  - $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$

- Sean z, w complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces se verifica que:
  - $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$
  - $-\vartheta \in \operatorname{Arg}(1/z) = \operatorname{Arg}(\overline{z})$

- Sean z, w complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces se verifica que:
  - $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$
  - $-\vartheta \in \operatorname{Arg}(1/z) = \operatorname{Arg}(\overline{z})$
- $$\boxed{\arg z + \arg w = \arg(zw) \iff -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi}$$

- Sean z, w complejos no nulos, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces se verifica que:
  - $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$
  - $-\vartheta \in \operatorname{Arg}(1/z) = \operatorname{Arg}(\overline{z})$
- $$\boxed{\arg z + \arg w = \arg(zw) \iff -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi}$$
- **Fórmula de De Moivre**
  Si $z \in \mathbb{C}^*$, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$, es decir:

$$\boxed{z^n = \big(|z|(\cos\vartheta + i\ \operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)}$$

- Queremos resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido.

- Queremos resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido.
- Las n raíces n–ésimas de z vienen dadas por

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), 1 \leqslant k \leqslant n}$$

- Queremos resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido.
- Las n raíces n–ésimas de z vienen dadas por

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), 1 \leqslant k \leqslant n}$$

- **Raíz n-ésima principal**

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z}{n}\right)}$$

$$-\frac{\pi}{n} < \arg\left(\sqrt[n]{z}\right) \leqslant \frac{\pi}{n}$$

- $$\boxed{\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \iff -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi}$$

- $$\boxed{\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \iff -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi}$$

- En el caso en que $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos que $\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi$, y no se cumple la condición anterior. En este caso

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$